MATE-MAGICA

I giochi di prestigio di Luca Pacioli

Aboca

ISBN 978-88-95642-37-6

In copertina:
particolare rielaborato tratto dal manoscritto inedito di Domenico Tancredi,
prima metà del 1700 (Collezione privata Vanni Bossi).

Immagini tratte da:
Archivio Fondazione Federico Zeri: p. 86.
Archivio Scala: pp. 18, 98, 99, 102, 109.
Bibliotheca Antiqua Aboca Museum: p. 95.
Biblioteca Nazionale di Spagna: p. 87.
Biblioteca Riccardiana di Firenze: pp. 50, 51.
Collezione privata William Kalush: p. 93.
Collezione privata Vanni Bossi: pp. 69, 70, 73, 74, 75, 78,79, 80, 81, 82, 84, 85, 88, 91.

Grafica e impaginazione: Michelangelo Rossi, Aboca Museum

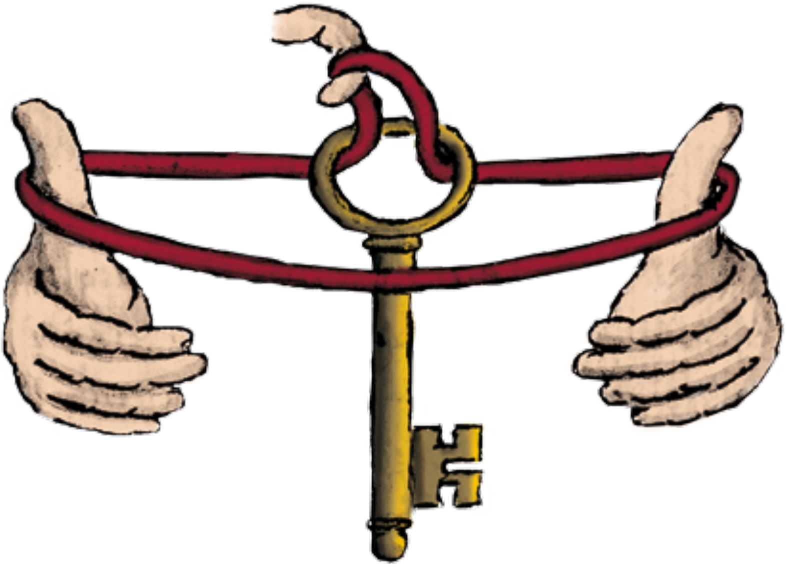
Stampato presso: xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

MATE-MAGICA

I giochi di prestigio di Luca Pacioli

Vanni Bossi,

Antonietta Mira, Francesco Arlati



Prefazione di Furio Honsell

Aboca

Indice

A Vanni Bossi

Sono colto da un certo timore nel domandarmi perché a me l'onere e l'onore di scrivere la dedica di questo libro.

Emerito sconosciuto, ho conosciuto Vanni Bossi[1] grazie alla Magia.

O forse è più corretto scambiare gli addendi: ho conosciuto la Magia grazie a Vanni Bossi.

Per la proprietà commutativa il risultato della somma non cambia, ed è il volume che avete fra le mani.

Non lasciatevi confondere da una prima rapida occhiata; andate più a fondo, come avreste dovuto fare per forza volendo conoscere Vanni.

Non fermatevi allo stupore che deriva da giochi matemagici e rompicapo logici che risalgono a più di cinque secoli fa e che tuttora sono in grado di tenervi svegli tutta notte a cercare una soluzione.

Così come non avreste dovuto fermarvi davanti alle sue splendide esibizioni magiche, né alla sua sterminata cultura che spaziava veramente in lungo e in largo, e nemmeno davanti alle sue maniere eleganti che ne facevano un gentiluomo d'altri tempi.

Troverete in questo libro ciò che avreste trovato in Vanni Bossi: curiosità e desiderio di stupirsi e di stupire, tipico dei grandi uomini.

Troverete un invisibile filo che collega tutti noi, senza distinzione alcuna, attraverso il tempo.

E troverete loro, nodi su quel filo, a segnare il passaggio, come tappe di un meraviglioso viaggio che come i giochi contenuti in questo libro, come la Magia, si evolve, si complica, lasciando indelebili tracce, domande, notti in bianco e splendida meraviglia.

Troverete nascosto fra le righe il Vanni Bossi bambino, in grado di andare in giro perennemente con il naso per aria a stupirsi di continuo, insieme al Vanni Bossi uomo, che continuamente si guardava indietro per raccoglie l'eredità di chi era passato prima di lui, capace di guardare avanti, certo che qualcuno sarebbe stato là in attesa di poter raccogliere la sua.

Nei due anni in cui ho avuto l'onore di frequentarlo ho spesso elucubrato sul fatto che con la sua scomparsa si sarebbero volatilizzati ricordi e tracce di un'epoca magica che non tornerà più. La Magia che immaginiamo tutti da bambini. I grandi maghi del palcoscenico e quelli dei piccoli bar, dei ristoranti, di strada. I bari, le truffe e gli scherzi. I trucchi che si passavano silenziosamente di mano in mano, come bigliettini sotto il banco di scuola. I giochi che dovevi inventare, fabbricare, mettere in commercio, per poterne fare di nuovi. Viaggi interminabili per vedere spettacoli, incontrare gente, riunirsi e bere fino a notte fonda fra carte, monete e risate, quando con la tecnologia non si andava molto lontano.

Tutto questo Vanni lo custodiva gelosamente, più di quanto facesse con i suoi giochi.

Storie che ora non ci sono più.

Avevo una strana fretta di conoscerle, una fretta che ora suona come una misteriosa premonizione, anche per chi studia magia.

Dalle mie parti è usanza dire, in concomitanza della scomparsa di una persona cara, che il dolore passa perché si dimentica in fretta ciò che non possiamo vedere.

Ed è questo il motivo principale di questo libro: tenere sotto gli occhi il ricordo dell'uomo e dello studioso. Andando avanti. Come sono certo avrebbe voluto Vanni.

Proprio ora me lo immagino dire: "Studiate e fate i giochi! E se vi capita di metterci dentro il mio nome, sappiate che proprio non sto a questionare. Anzi".

È una promessa Maestro, intanto fai vedere a tutti chi è il più bravo a fare "miracoli".

Ciao Vecchio Pavone.

Addio Vanni.

Livio Spalletti
Allievo di Vanni Bossi

Nota alla Dedica

[1] Vanni Bossi (1952-2008).

Nonostante la sua innata introversione, in continuo contrasto con un sottofondo "pavonesco" in accordo invece con la sua elegante presenza di gentiluomo, Vanni Bossi è da considerarsi uno dei più eclettici tra tutti i prestigiatori e creativi (dove il termine fa riferimento ad un profondo studio analitico e ad una costante e minuziosa rivisitazione/realizzazione di giochi di prestigio per lo più nel campo della micromagia) che abbia mai calcato le scene, negli ultimi decenni, dell'ambiente magico nazionale ed internazionale, lasciando in tutto il mondo tracce indelebili del suo passaggio, testimoniate da decennali amicizie con grandi nomi della prestigiazione e da illusioni che ancora oggi mantengono una sconcertante attualità.

Una passione, quella per la Magia (termine che useremo come sinonimo di prestigiazione), che nasce e si sviluppa in tenera età, l'esatto iter rimarrà per sempre avvolto da mistero, e che è solo una delle facce di un personaggio la cui passione per la manualità unita ad una curiosità pressoché illimitata dovrebbe essere una spinta propulsiva per tutti.

Storico della prestigiazione e più in generale studioso del mondo dello spettacolo, "inventore" (qui, sempre a causa del suo amore per il mistero si hanno in realtà poche informazioni per quanto riguarda i suoi risultati nei diversi campi di ricerca da lui esplorati; per certo il suo passato di perito chimico è costellato di grandi risultati, ed il campo magico ne è diretta testimonianza), bibliofilo e collezionista (la sua libreria annovera volumi di prestigio e perle dell'editoria "minore" che spesso ha accompagnato il mondo dei "ciarlatani", senza citare alcuni "cimeli" di valore inestimabile, anch'essi legati all'ambito dello "spettacolo" in tutte le sue forme), creativo ad ampio spettro (le sue "edizioni a tiratura limitata" di testi come quello del Galasso sono un concreto esempio delle sue conoscenze di legatoria, di stampa e di tutto quello che concerne la produzione e riproduzione di un libro secondo antichi sistemi), squisito conversatore (non tutti ne possono portare testimonianza in quanto parco, per scelta, nel lasciarsi trasportare in lunghe dissertazioni se non in presenza di persone che, dopo un attento vaglio, poteva considerare abbastanza "intime").

Mago per passione e non per professione, ha saputo portare la sua arte ben oltre i confini del suo paese attraverso stancanti "maratone" fatte di viaggi oltreoceano e sfilze interminabili di conferenze, dove sempre veniva accolto con il calore e la stima che spesso maghi di professione possono solo arditamente sognare.

Schivo per carattere, preciso e puntiglioso con sé stesso e con gli altri, ha posto la magia davanti al suo personale tornaconto, considerandola *Ars Magna*, dedicandole fatica e notti insonni, rispetto e amore, inimicandosi a malincuore i "pressapochisti" e aprendo le porte a coloro che, con un pizzico di doverosa umiltà, hanno avuto la pazienza di attendere e studiare prima di esibirsi in comiche rappresentazioni di una magia che è, e sempre sarà, un pallido riflesso di quell'onesto ingannare che solo sa creare imperitura meraviglia negli occhi degli astanti.

Ricercatore attento, mente sopraffina, che ha saputo convogliare dai più disparati campi dello studio umano, dalla concretezza delle discipline fisico-chimiche-matematiche passando per l'impalpabilità delle scienze preposte allo studio della mente umana, concetti, teoremi e formulazioni, trasfigurandoli attraverso un'abilità manuale senza pari ed un'eloquenza dotta ma mai altezzosa o pedissequa, fino ad ottenere "gioielli" di squisita fattura, che pare riduttivo tentare di inquadrare come mere illusioni.

Prefazione di Furio Honsell

Preparazione. Dopo la sorprendente scoperta in una biblioteca goriziana di un manoscritto sugli scacchi fino ad allora anonimo che immediatamente riconobbe invece come il perduto *De ludo scachorum* di Luca Pacioli, Duilio Contin, che all'epoca curava per Aboca di Borgo Sansepolcro la pubblicazione in *facsimile* delle opere del loro concittadino Luca Pacioli, si rivolse a me per un commento al *De viribus quantitatis*. Mi aveva visto nella trasmissione televisiva "Che tempo che fa?" proporre a Umberto Eco di giocare con un quesito matematico sull'*indigitatio* che Alcuino Di York aveva composto per l'ammaestramento di Pipino, figlio di Carlomagno.

Colpito dall' ampiezza, originalità e profondità di quest'opera di Pacioli decisi di proporre a mia volta tale compito ad Antonietta Mira, brillante sapiente di statistica, che poco tempo prima avevo conosciuto casualmente a Pavia in un'affascinante serata dove ci aveva tutti stupiti – ma forse dovrei dire lasciato sgomenti per la debolezza delle nostre menti – con innumerevoli giochi di prestigio a base matematica. A sua volta Antonietta Mira propose di coinvolgere il suo *Magister* Vanni Bossi che ebbi il privilegio di conoscere sulle rive del lago di Como, una sera nella quale mi comunicò di accettare il compito il cui esito, carissimi lettori e lettrici, oggi avete tra le mani.

Effetto. Se qualcuno avesse ancora qualche dubbio che Luca Pacioli, e massimamente nel *De viribus quantitatis*, anticipi innumerevoli e imprevedibili luoghi dove matematica e arguzia si incontrano, questo eccezionale libro *Mate-Magica* di Vanni Bossi, Antonietta Mira e Francesco Arlati, gli impedirà di perseverare nell'errore.

Con sapienza inimmaginabile, coniugando precisione e leggerezza, i nostri autori ci guidano a scoprire come Pacioli seppe, tra i primi, cogliere e annotare quegli aspetti ludici, prestigiatori, enigmistici della matematica, della fisica, della biologia, delle scienze cognitive, e reciprocamente, quegli aspetti matematici, fisici, biologici e cognitivi dei giochi, dei rompicapi, della prestidigitazione e dell'enigmistica, dell'ironia.

Mate-Magica è un contributo fondamentale sia per l'interpretazione del *De viribus quantitatis*, opera al tempo stesso ermetica e divulgativa, sia, forse soprattutto, per la contestualizzazione storica dei giochi di prestigio matematici e dei rompicapi trattati dal Pacioli.

Illuminanti sono i salti, i riferimenti, le citazioni a opere e autori straordinari, sia anteriori che posteriori, al Pacioli, che i nostri autori compiono. Ne emerge uno scenario che attraversa il tempo e lo spazio: non un *hapax* dunque il *De viribus quantitatis*, ma un punto di riferimento in una storia secolare che corre parallela prima alla magia e poi alla scienza, il cui protagonista sono l'arguzia e l'astuzia. L'aura nella quale il libro ci avvolge è misteriosa e chiarissima al tempo stesso. Un'autentica avventura intellettuale.

Personalmente, di fronte agli *effecti* del *De viribus quantitatis* così come a questi degnissimi loro commentari in *Mate-Magica*, rifletto sul più meraviglioso enigma dell'universo, che Pacioli fu tra i primi a cogliere: la nostra capacità di risolvere tanti di quegli enigmi che proprio la Natura stessa ci pone. Perché c'è un nesso che spesso sfugge o viene sottovalutato, che lega rompicapo, motti di spirito, giochi di prestigio alla Scienza. Nesso che né a Pacioli, né a Bossi e Mira è sfuggito: la *forza della Scienza* nell'interpretare la natura si fonda proprio sulla *conoscenza* dei nostri strumenti cognitivi e psicologici. E solo nella magia prestigiatoria, nei divertimenti matematici, nei rompicapo e nell'ironia questi possono essere compresi e messi a nudo, anche nei loro rischi e limiti, attraverso illusioni cognitive e ottiche e punti ciechi.

E così, brillantemente, Bossi, Mira e gli altri che hanno collaborato a questo libro, si aggiungono alla schiera tra cui capeggia Pacioli, forse non così ampia ancora, di coloro che sanno far emergere quella matrice comune, quel residuo matematico, che è in tutte le dimensioni dove curiosità, osservazione, scienza e divertimento danno significato al mondo che ci circonda.

In conclusione: tutta la nostra ammirazione e riconoscenza a Vanni Bossi, autentico Luca Pacioli del XX secolo.

Prof. Furio Honsell
Matematico

Genesi di una trilogia

Questa preziosa opera che avete fra le mani, amici lettori, con la quale state per immergervi in una rivisitazione matemagica a tutto campo del *De viribus quantitatis* di Fra' Luca Pacioli, altro non è che il terzo volume di una collana dal titolo *Classici della prestigiazione italiana* ardentemente voluta e sostenuta con tenacia dal genio creativo e visionario di Vanni Bossi.

Con la sua prematura dipartita, il suo ambizioso sogno editoriale di riportare alla luce, ma soprattutto commentare e interpretare in profondità testi antichi da annoverare tra le pietre miliari della letteratura magica, vede, al momento, la sua conclusione con questa mirabile rilettura del capovaloro del Pacioli, libro tra i più amati dal Vanni storico e prestigiatore.

Dico "al momento", perché tale è la mole di ulteriori spunti di ricerca affidati in eredità ai suoi più devoti e intimi collaboratori, dei quali ho avuto il privilegio di far parte, che sarebbe auspicabile proseguire in futuro il suo progetto, doveroso tributo verso la figura di un Maestro senza il cui coraggio editoriale le nostre biblioteche magiche non sarebbero ora impreziosite da gemme di rara bellezza.

Quando conobbi il nostro *Magister* un decennio fa, stava lavorando assiduamente alla pubblicazione di un volume speciale in occasione del trentennale, nel 2002, del Club Arte Magica di Milano (CLAM), di cui era Presidente. Non molto tempo dopo diede infatti alle stampe un'opera a tiratura limitata dalla pregiata composizione editoriale sia nei contenuti che nella veste tipografica: nasceva l'*Ars Magna*.

Ma la sua mente vulcanica, fucina giornaliera di nuove idee, aveva nel contempo partorito il progetto della collana dei classici italiani della Magia: riscattando dalle tenebre dell'oblio una testimonianza scritta del 1593, i *Giochi di carte bellissimi di regola e di memoria* di Horatio Galasso d'Arienzo, ne offrì una ristampa integrale[1] accompagnata da un pregevole studio critico che la poneva alla ribalta della scena internazionale come "il primo trattato di cartomagia pubblicato" (anticipando di ben tre secoli un "miracoloso" prearrangiamento del mazzo di carte noto agli esperti come *Si Stebbins stack*).

Di nuovo, come per l'*Ars Magna*, ne uscì un'elegante edizione ad esemplari numerati, curata nei minimi particolari; anzi, vista la rarità dell'opera contenente una raffinata icononografia applicata a mano, alcune decine di copie vennero confezionate in pelle dalle pazienti mani del Maestro legatore Vanni, moderno artigiano rinascimentale della Magia a tutto tondo, capace di coniugare in ogni sua creazione il sapere enciclopedico di storico con le fini abilità manuali di "mastro" di bottega (che vi fosse di mezzo un lavoro di tornio, di fotocomposizione, di restauro, d'arte legatoria o con reazioni chimiche, non faceva differenza!).

Fu proprio in occasione della conferenza di presentazione del *Galasso,* nel marzo 2002, che Vanni mi chiese di collaborare alla traduzione in italiano e, in veste di matematico, all'analisi dei contenuti del *Liber de ludo aleae* di Girolamo Cardano (l'edizione postuma del 1663).

Ovviamente ero al settimo cielo! Dopo quasi un anno di arduo districarsi in una prosa latina sovente ingarbugliata, punteggiato da interminabili conversazioni telefoniche con Vanni in cui alternavamo scoramento ed entusiasmo, finalmente la stamperia sfornava il nostro *De*

[1] *Giochi di carte, bellissimi di regola e di memoria .... Composti e dati in luce per Horatio Galasso d'Arienzo.* In Venetia 1593, Stamperia Ammiano, Milano, 2001.

ludo italiano[2], superbo *vademecum* per il giocatore d'azzardo (nei giochi di carte e coi dadi) da un lato e pietra miliare della moderna teoria probabilistica dall'altro.

A distanza di tempo, adesso che il vuoto della sua assenza si fa sempre più indelebile, sento di non averlo mai ringraziato abbastanza per avermi scelto nell'affiancarlo in quel progetto e soprattuto per la sua sincera amicizia. È per questo che ho accettato con gioia l'invito a lasciare un mio granello d'arena nell'analisi di alcuni de *I giochi di prestigio* da parte degli amici Antonietta e Francesco, circondandosi dei quali, negli ultimi anni delle sue fatiche (non solo editoriali), Vanni ha saputo scegliere le persone giuste. Parlando dei suoi compagni di avventura nella collana dei *Classici della prestigiazione* ebbe a dirmi:

"Sono stato dotato da madre natura di un buon naso, fisicamente parlando, ma anche di un buon fiuto".

Quest'opera, che chiude la trilogia, ne è un'ulteriore conferma, se mai ce ne fosse stato bisogno.

In questo breve *excursus* sulla genesi di tale collana, sembrerebbe mancare la scintilla che ha spinto il nostro mentore a regalarci quest'ultimo gioiello di famiglia. Il mistero è presto svelato: il sacro fuoco dell'arte di rileggere matemagicamente il *De viribus* era in Vanni già acceso da tempo, e ravvivarlo tanto era più facile quanto più materiale sul tema riusciva a collezionare, così che, pur nel vivo dello studio del *De ludo*, non era infrequente nei nostri discorsi veder fare capolino Fra' Luca Pacioli e i suoi ameni "prestigi". Tuttavia i tempi per il *De viribus* non erano ancora del tutto maturi, anche se Vanni all'evento si stava allenando.

Come un abile mentalista che fa uso del *one-ahead principle* risultando sempre "avanti di uno" step nel suo processo di conoscenza rispetto a ciò che il pubblico immagina, così Vanni – che all'insaputa di molti già nella scelta del titolo *Ars Magna* strizzava l'occhiolino al Cardano (autore dell'omonimo monumentale trattato di algebra) – nella stesura del *De ludo,* puntava ora al Pacioli! Tant'è vero che, nel tentativo vano di fissare per marzo 2004 la presentazione ufficiale del *Liber de ludo aleae*, il suo spirito irrequieto e girovago scherzosamente mi avvisava che "Il 26 va bene... peccato sia ad Atlanta al *Gathering for Gardner* dove darò una lezioncina sui giochi di carte contenuti nel *De viribus* del Paciolo. Faremo tutto ad aprile".

Or dunque: è arrivato anche per noi il momento così a lungo atteso, Maestro Vanni, di sederci comodamente ad ascoltare la tua *lectio magistralis*. In attesa, chissà, per mezzo dei tuoi più fidati amici, di poterci ancora stupire con un nuovo prodigio editoriale tra quelli – "sempre avanti di uno" – che avevi in serbo per noi."

Giorgio Orfino
Prof. di Matematica e Fisica,
cultore di "Matemagia" e "Teoria dei giochi"

[2] *Liber De Ludo Aleae*, Stamperia Ammiano, Milano, 2003.

Introduzione

"Et li rozzi stimarano miraculo"

Mate-magica è una moderna rilettura di alcuni "prestigiosi effetti" selezionati dalla prima (*Delle forze numerali cioè de Arithmentica*) e seconda parte (*Della virtù et forza geometrica*) del *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli. Attraverso questo lavoro si desidera offrire a prestigiatori, matematici, appassionati, dilettanti o anche solo curiosi di magia, un breve compendio e un'istantanea della prestigiazione nell'Italia del XV secolo.

Il *De viribus quantitatis* è la prima ampia raccolta di ricreazioni matematiche e giochi di prestigio a noi pervenuta. Altri autori prima del Pacioli, tra cui ricordiamo Leonardo Pisano, detto Fibonacci, ed entrambi i Calandri, Francesco e Pier Maria, avevano presentato nei loro trattati d'abaco alcuni ludi numerici allo scopo di insegnare la matematica attraverso espedienti ricreativi.

E, in realtà, testi che trattano di divinazioni aritmetiche punteggiano i secoli che vanno dall'epoca carolingia sino al Rinascimento e sono stati analizzati nel dettaglio da W. Kalush[1]. La raccolta più antica, nota come *Propositiones ad acuendos iuvenes*, viene attribuita ad Alcuino da York (735-804), filosofo, docente e teologo britannico che Carlo Magno chiamò alla sua corte per favorire lo sviluppo della cultura nel suo impero. In questa raccolta è descritto il primo "ludo matematico" nel quale, grazie ad una serie di operazioni aritmetiche, è possibile "indovinare" il numero che è stato segretamente pensato da uno spettatore. Questo gioco compare anche nella raccolta dal titolo *De arithmeticis propositionibus* che si ritrova sovente integrata nell'opera omnia di Beda il Venerabile (672 c. - 735). Tuttavia, si tratta probabilmente di un'attribuzione apocrifa e la paternità del gioco matemagico è di Alcuino[2].

Con certezza, il testo di Pacioli rappresenta il primo trattato che ci è pervenuto in lingua italiana sull'argomento e raccoglie in modo sistematico giochi matemagici, di topologia o basati su principî fisici, senza alternarli ad esercizi più tradizionali e a lezioni di teoria.

Vi sono numerose testimonianze del fatto che il *De viribus quantitatis* sia stato utile come spunto e fonte d'ispirazione per successive raccolte di ricreazioni matematiche come quella di Horatio Galasso, *Giochi di carte bellissimi di regola e di memoria*..., pubblicata a Venezia nel 1593. In quest'opera vengono descritti 25 giochi con le carte, fra cui la prima versione stampata di un sistema di preordinamento di un mazzo. Molti di questi giochi sono basati su principî matematici e alcuni si trovano già nel lavoro di Pacioli[3].

Va inoltre ricordato lo studio di Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, *Problemes plaisants et delectables* (1612), la prima opera a stampa su questi argomenti, che, sino alla pubblicazione del manoscritto del Pacioli (Marinoni, 1975)[4], era ritenuta la più antica raccolta di ludi matematici.

---

[1] William Kalush, fondatore del *Conjuring Arts Research Center* di New York, *Abraxas*, n° 0, 2000.

[2] Il più bel testimone dei giochi di Alcuino, un codice databile intorno all'anno 840, è stato venduto alcuni anni fa a New York ed acquistato dall'Università di Tier, una delle più antiche città tedesche, per un milione di dollari.

[3] Si pensi, per esempio, nel Capitolo LXIIII, al gioco *"d'un numero pensato per via de un cerchio"* e lo si confronti con il quarto del Galasso: entrambi sono praticamente la stessa versione del classico "gioco dell'orologio".

[4] L'articolo che ha fatto riscoprire il *De viribus quantitatis* ai nostri giorni è di Andrea Agostini, ma forse perché pubblicato in una rivista specialistica (*Periodico di Matematiche* 4/4, 1924, pp. 165-192), ebbe inizialmente poca diffusione, soprattutto fra gli storici della prestigiazione.

Volume di matematica dilettevole, il *De viribus quantitatis* possiede finalità sia didattiche sia ricreative. Le potenzialità didattiche del lavoro sono riconosciute anche da M. Tomatis[5], il quale identifica in Pacioli uno dei primi ad intuire l'importanza di un contesto sorprendente per rendere più interessanti i problemi di matematica agli occhi di uno studente.

Nella lettera dedicatoria, Pacioli scrive di aver composto il *De viribus quantitatis* per non dover restare inattivo ("*aciò le durate fatighe et assidue vigilie non dovesino al tutto anichilarsi*") proprio sul finire di una vita spesa nella stesura di opere importanti e impegnative ("*non mediocri affani*"), fra cui ricorda la *Summa de arithmetica*, il *De divina proportione*, il volgarizzamento degli *Elementi* di Euclide e lo *Schifanoia*. Giustifica, un po' ironicamente a nostro avviso, il fatto di non avervi posto mano fino a quel momento dicendo che le perle rare vanno elargite con parsimonia e solo ai meritevoli, altrimenti non sarebbero più delle rarità ("*tanto sienno da essere stimate le cose quanto più fra gli homini rare se ritroveno*"); Dio stesso d'altronde, pur elargendo "*sole, aqua, aere, terra et altri fructi a buoni et tristi*" riserva ulteriori "*infinite gratie*" a quanti "*asai più che gli altri gli sonno grati*". A riprova del fatto che si tratta di una giustificazione ironicamente lusinghiera nei confronti del dedicatario, l'opera è scritta in "*vernacula et materna nostra vulgar lingua*" perché sia meglio compresa e goduta da tutti: non che a Sua Eccellenza "*un più alto ch'el ciceroniano stile*" non si confaccia, ma il latino ormai è una lingua difficile, i cui termini "*scabrosi*" non sono più facilmente intesi "*per la rarità di lor buoni praeceptori*".[6]

Sempre nella lettera dedicatoria, Pacioli cita un luogo comune del tempo secondo cui le persone non erudite, "*li rozzi*", non possono giungere a certe conoscenze ed equipararsi ai colti poiché, seguendo un "*comune et sapiente*" detto, "*non a ognuno tutte le cose equamente sono da distribuire*".

È interessante notare come, in linea con la visione prevalente ai tempi, il Pacioli spesso accosti le donne ai "*rozzi*" ed agli "*idioti*", considerandole ugualmente "*inesperte*" e non in grado di capire come con le "forze delle quantità" si potessero ottenere grandi effetti, sia nel campo pratico sia in quello speculativo. Questa mancanza di dottrina e di conoscenza dei principî basilari dell'aritmetica e della geometria rendeva le donne e i "*rozzi*" facili da ingannare con illusioni e da sorprendere con giochi di prestigio. L'autore esprime ripetutamente questa concezione.[7]

È verosimile ritenere che Pacioli abbia condiviso alcuni degli "*effecti*"che compaiono nel *De viribus quantitatis*, con artisti di corte e prestigiatori di strada, instaurando un dialogo "interdisicplinare" presumibilmente vantaggioso per entrambe le parti. Questo spiegherebbe la sua conoscenza di molti dei giochi non matematici e dei puzzle, descritti nella seconda e terza parte del manoscritto. Ci piace immaginare che Pacioli, nell'intento di ricambiare i prestigiatori itineranti per aver condiviso con lui dei "segreti", spiegasse loro dei giochi basati su principî fisici o topologici – di solito sconosciuti alla gente comune – e che, forse proprio grazie a questi reciproci scambi di "prestigi", si trovano integrati in alcuni "opuscoli dei segreti", tipicamente trasmessi oralmente e, solo occasionalmente, scritti e venduti da maghi itineranti.

[5] Tomatis Mariano, *La magia dei numeri,* Milano, Kowalski, 2010.

[6] Nella "*lettera dedicatoria ... buoni praeceptori*": nota di Silvia Toniato.

[7] Capitolo XLI. Documento: "*...Et li rozzi stimarano miraculo*". Capitolo CXXXI. Documento: "*...et a l'idioti parrano stranno, maxime donne*". *Taula del presente compendio: "Dele gentilezze et giuochi che si fanno per vie naturali mediante anchora altri segni che ali rozzi parano veramente più che miracoli*".

Le ricreazioni del Pacioli vengono proposte con un taglio intrinsecamente “magico”: nella maggior parte dei casi i giochi matematici sono presentati come esperimenti di lettura del pensiero, premonizione o divinazione. Gli effetti descritti sono accompagnati dalla descrizione di espedienti utili a renderli maggiormente spettacolari, stupefacenti ed incomprensibili. Così, se alcune delle regole presentate sono facili da comprendere e padroneggiare, altre sono intenzionalmente complicate. L’autore, per esempio, aumenta il numero dei passaggi necessari per ottenere l’effetto, onde evitare che il segreto venga carpito e riprodotto. La “complicazione” del procedimento del gioco e l’inserimento di abbellimenti o variazioni, funzionali solo alla presentazione, permettono di riproporre lo stesso effetto in modi diversi e, quindi, di celare meglio il principio base, confondendo volutamente lo spettatore e valorizzando il procedimento magico.

Tra i giochi matemagici del Pacioli ne abbiamo selezionati alcuni che si eseguono principalmente con carte, dadi e monete. Questi sono in generale piuttosto facili da comprendere per chi ha delle basi matematiche, algebriche e geometriche (elementari oggi per noi, ma non tali per la gente comune dell’epoca).

Questi giochi si trovano specialmente nella prima parte del manoscritto e sono stati analizzati nel dettaglio in uno studio di Amedeo Agostini[8] il quale, per ogni ludo matematico, riporta l’equazione o l’identità alla base del suo funzionamento. Altri giochi, contenuti principalmente nella seconda e terza parte del *De viribus quantitatis*, sono invece più difficilmente comprensibili in quanto mancano, nella copia manoscritta che ci è pervenuta, le immagini esplicative. Si tratta per la maggior parte di puzzle eseguiti con oggetti comuni – corde, frutta, bicchieri – o di effetti basati su principî fisici, idraulici e ottici. Per alcuni di questi si sono reperite, in opere successive, immagini che facilitano la comprensione del testo.

In *Curiosità e divertimenti con i numeri* di F. Honsell e G. T. Bagni (Aboca, 2009) sono analizzate altre sezioni del *De viribus quantitatis*, in particolare la parte terza che contiene documenti morali, proverbi e documenti dedicati alle “forze e virtù naturali”. In questo volume compare un indice ragionato del contenuto del manoscritto rinascimentale.

Esiste un altro manoscritto del Pacioli (l’unico autografo, oltre al *De ludo scachorum*[9]), noto come *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos*[10], in cui sono descritti giochi di matemagia. Questo manoscritto è datato 1478 e, quindi, precede di qualche decennio il *De viribus quantitatis*, anticipando molti dei giochi matematici e di prestigio (esclusi quelli topologici e fisici) commentati in questo libro. Si tratta di un volume di supporto all’insegnamento della matematica agli studenti di Perugia. Un’interessante edizione commentata e tradotta della parte di questo manoscritto che si occupa di trucchi, enigmi e passatempi è proposta da D. Bressanini e S. Toniato ne *I giochi matematici di Fra’ Luca Pacioli* (Dedalo, 2011).

Secondo Gilberto Govi, uno dei maggiori studiosi del XIX secolo di Leonardo, molti giochi del *De viribus quantitatis* andrebbero attribuiti allo stesso da Vinci. Pur riconoscendo che fra i due vi furono amicizia e dialogo intellettuale, sembra da escludere una diretta paternità di Leonardo nella stesura del *De viribus quantitatis*.

È noto che negli appunti di Leonardo sono descritti due “giochi di partito” e che in vari

[8] Amedeo Agostini, Il *“De viribus quantitatis”* di Luca Pacioli;*Periodico di Matematiche,* 4/4, 1924, pp. 165-192
[9] Un’elegante edizione in facsimile del *De ludo scachorum* è pubblicata da Aboca, 2007.
[10] *Ms. Vaticano Latino* 3129.

punti del *Codice Atlantico* siano descritti effetti basati su quella che oggi è definita fisica dilettevole, rintracciabili anche nel *De viribus quantitatis*. Data la contemporaneità della stesura dei due manoscritti, risulta difficile attribuire oggi la priorità della descrizione di alcuni giochi a uno dei due autori. Questa concordanza dei testi corrobora la possibilità che ci sia stato un confronto e una collaborazione Pacioli-da Vinci nel campo della "Matemagia", ma non giustifica, né avvalora, la tesi del Govi. Contro tale ipotesi è significativa la mancanza di attribuzioni specifiche a Leonardo nel *De viribus quantitatis* mentre è evidente l'usanza del Pacioli di riferire l'invenzione dei giochi ai rispettivi ideatori. Ad avvalorare tale riscontro si veda la citazione di Leonardo – da parte di Pacioli – sia nell'introduzione sia all'interno della sezione *Documenti et proverbii mercanteschi utilissimi* nel *Capitolo IX. Documento: scrivere che non se legi se non con spechio*.

L'ultimo capitolo di Mate-Magica è dedicato ad un confronto tra il foglio 958r del *Codice Atlantico* e il *De viribus quantitatis*. Il lavoro si rifà alle suggestioni nate dai colloqui di Vanni Bossi con il Professor Augusto Marinoni. I due legnanesi si incontrarono più volte per discutere l'argomento e Marinoni confermò l'interesse di Leonardo per l'arte della prestigiazione e il fatto che eseguisse personalmente alcune magie. La scomparsa del Professore, avvenuta prima della pubblicazione della sua opera monumentale – la trascrizione completa del *Codice Atlantico*[11] – non ha permesso ulteriori approfondimenti. Purtroppo gli appunti personali del Marinoni non sono stati pubblicati e non risultano disponibili per la consultazione.

Lo sguardo del prestigiatore moderno coglie nelle istantanee degli *impromptu* (effetti apparentemente improvvisati) di Pacioli l'essenza della sua arte e ne deduce quei fondamenti che per secoli sono stati alla base del suo prestigio.

L'arte matemagica dello scienziato rinascimentale si muove su due cardini fondamentali. Il prestigiatore ha l'obbligo morale di mantenere la formula segreta, in modo che non possa essere riprodotta, divulgata e spiegata, conservando così il suo carattere magico e la sua essenza di opera d'arte non riproducibile. Il prestigiatore può sfruttare il principio della "distrazione indotta" dello spettatore (principio noto anche con il termine inglese di *misdirection*), ovvero deve utilizzare un procedimento atto a distogliere lo spettatore dalla formula e dal gesto, che in realtà realizzano il prestigio. Questi principî, così esplicitamente suggeriti dal Pacioli e alla base di un diletto magico che ci accompagna da secoli, furono formalizzati testualmente e pubblicati solo nella seconda metà del 1800, permettendo l'attuale sviluppo dell'arte della prestidigitazione.

Non si può chiudere questa breve introduzione senza sottolineare l'importanza attribuita dal Pacioli – e tutt'oggi certamente da condividere – sia al riconoscimento della paternità dei giochi sia all'attenzione per la loro messa in scena. Tale insegnamento, poco seguito da molti prestigiatori contemporanei, è in realtà il riconoscimento del gesto magico come arte e mestiere.

A sottolineare la centralità del prestigio nel lavoro di Pacioli, il commento qui presentato è diviso in sei capitoli, *giochi matemagici, rompicapo e giochi topologici, giochi di prestigio basati su principî fisici, illusioni sensoriali, scommesse*, dei quali l'ultimo dedicato ai *riscontri tra il foglio 958r del Codice Atlantico* e il *De viribus quantitatis.* L'ordine con cui si è deciso di presentare

[11] *Da Vinci Leonardo, Il Codice Atlantico della Biblioteca Ambrosiana di Milano* nella trascrizione critica di Augusto Marinoni, presentazione di Carlo Perdetti, 3 voll., Firenze, Giunti, 2000.

gli effetti non segue quello del manoscritto di Pacioli.

Per accompagnare il lettore indietro nel tempo e recuperare il sapore della scrittura di fine Quattrocento, si riporteranno occasionalmente citazioni puntuali del testo. Nonostante sia stato scelto di riferirsi al testo originale solo quando questo fosse di facile lettura, sarà tuttavia evidente al lettore la difficoltà nella comprensione della lingua del Pacioli. La fonte cui si farà riferimento è la trascrizione semidiplomatica, attualmente inedita, di Enzo Mattesini rivista, per le parti citate nel volume, da Silvia Toniato[12] (la trascrizione qui riportata non evidenzia gli interventi dell'editore sul testo). Tutte le citazioni e i titoli stessi che compaiono in indice rispettano la stesura originale del testo manoscritto del *De viribus quantitatis.* Il lettore interessato può consultare la mirabile riproduzione anastatica del manoscritto pubblicata da Aboca (2009).

Al fine di evidenziare la ricchezza degli studi fioriti intorno all'analisi del testo del Pacioli e di facilitare il reperimento delle fonti, verrà riportata – a margine di ogni *effecto* – la segnalazione delle pagine in cui è possibile rintracciarlo nell'edizione dell'Ente Raccolta Vinciana (DVQ, seguito dal numero di pagina) e il riferimento ad altri testi dove lo stesso gioco compare o è stato commentato (senza la pretesa di essere esaustivi).

Dalla rilettura proposta emerge, dunque, con chiarezza, specie in una prospettiva di attualizzazione del *De viribus quantitatis*, come l'unicità e il "prestigio" del compendio siano riverbero del valore didattico dell'intera attività del Pacioli, in cui la bellezza estetica e il potere espressivo e stupefacente della conoscenza matematica trovano esemplificazione negli *effecti* ludici e ricreativi che costituiscono la premessa scientifica della moderna prestigiazione.

Chiara Stoppani
Antonietta Mira

[12] Le parti e le note relative alle trascrizioni del *De viribus quantitatis*, a Luca Pacioli e agli aspetti di questo lavoro inerenti alla filologia sono state sottoposte a (e in alcuni casi curate da) Silvia Toniato, filologa e specialista di codici e testi di argomento matematico fra VII e XVI secolo. La dott. Toniato non è responsabile della eventuale mancata integrazione delle correzioni segnalate.


EVCLIDES.

Note all'Introduzione: Luca Pacioli e il De viribus quantitatis

Luca Pacioli, conosciuto anche come Paciuolo, Paciolo o Frate Luca del Borgo, nacque nell'aretina Borgo Sansepolcro presumibilmente nel 1445. Avviato all'attività mercantile, si formò nelle scuole d'abaco e mostrò subito interesse e predisposizione per gli studi matematici. Tra il 1470 e il 1476 lasciò la mercatura, prese gli ordini minori, e seguendo l'inclinazione naturale si dedicò allo studio, all'insegnamento, alla ricerca e alla divulgazione scientifica.

Durante gli anni dell'apprendistato mercantile, soprattutto a Venezia, dove si trasferì nel 1464 circa, sviluppò una profonda conoscenza dei sistemi di calcolo utilizzati nelle attività commerciali ed entrò in contatto diretto con le pratiche e la cultura scientifica più avanzata. Autore del primo testo a stampa noto che tratti del sistema della duplice rilevazione, Pacioli ha raccolto, ordinato e sistematizzato nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Capitolo XI, *Particularis de computis et scripturis*, Venezia, 1494), conoscenze e usanze del calcolo commerciale dei mercanti dell'epoca. Come frate francescano ritroviamo Pacioli pubblico insegnante a Perugia, Napoli, Roma, Borgo Sansepolcro, Padova, Assisi, Urbino; docente universitario (a Milano, Pavia, Pisa, Bologna, Roma) e ospite di corte a Firenze, Milano e Urbino (Bressanini e Toniato, 2011, p. 9).

A Milano (1496-1499) fu docente e amico di Leonardo da Vinci che collaborò con lui alla realizzazione delle illustrazioni del *De divina proportione*. Frequentò ambienti prestigiosi ed artisti e scienziati di fama. La sua figura è adombrata dall'accusa di plagio, che gli mosse già il Vasari, del testo di Piero della Francesca, del quale fu, forse, allievo a Sansepolcro. Secondo una tradizione inaugurata dal Vasari[1], vi è chi ritiene che Pacioli attinse, senza darne credito, ai testi di della Francesca per la compilazione di un *libellus* sui cinque solidi regolari in appendice al *De divina proportione* (1497). Questa appendice è considerata, anche se non unanimemente, una traduzione volgare del trattato *De quinque corporibus regularibus* (1485) di Piero della Francesca.

A questo riguardo assume particolare significato il *De viribus quantitatis:* infatti nel testo l'autore cita, seppur genericamente, le fonti, dà credito ad allievi e colleghi, in particolare a Leonardo da Vinci, riporta fedelmente l'indicazione di date ed eventi contemporanei e, nella presentazione dell'opera, offre interessanti informazioni sui suoi stessi lavori. Il testo ci regala così preziosi riferimenti per la ricostruzione della vita e del pensiero del Pacioli e della sua epoca.

Per il prestigiatore-ricercatore del XXI secolo il lavoro di Pacioli rappresenta una fonte particolarmente preziosa. Infatti, molti dei giochi descritti furono inventati o rielaborati dall'autore, ma altri facevano già parte del repertorio di operatori "professionisti".

Di alcuni di questi, grazie a Pacioli, conosciamo anche il nome. Alcuni giochi sono probabilmente stati inventati da scolari del Pacioli ai quali è doverosamente dato credito: Pacioli ci dice esplicitamente di aver incoraggiato i suoi studenti a fare questo. Per esempio nel capitolo XLVII nomina il suo discepolo Carlo de Sansone da Perugia. Nel capitolo XLVIII fa riferimento a Catano de Aniballe Catani dal Borgo il quale eseguì a Napoli nel 1496 il gioco descritto. La data è interessante poiché suggerisce che la maggior parte dei giochi sia stata inventata nell'ultimo quarto del quindicesimo secolo.

Gli studi successivi non riconoscono alla sua attività di matematico grande originalità, ma piuttosto una profonda capacità didattica, di analisi, di definizione dei sistemi di calcolo correnti e di divulgazione.

Pacioli è da considerarsi una delle figure più significative della cultura rinascimentale, non solo perché nella sua attività trova collocazione gran parte della precedente elaborazione, teorica e pratica, in àmbito matematico, raccolta e ordinata in compendi di grande valore didattico, ma soprattutto perché, nella sua concezione, come emerge dalla Summa, la scienza matematica è vista come il fondamento di tutte le altre scienze

Sebbene alcuni studi successivi abbiano rilevato come l'opera del Pacioli oscilli tra due concezioni antitetiche della matematica, una di natura pratica, sviluppata grazie alla sua conoscenza e frequentazione degli ambienti commerciali ma anche di architetti e pittori, e l'altra di origine speculativa, che egli ritrova e diffonde nelle scuole e nelle università, il lavoro del Pacioli risulta eclettticamente unitario ed è difficile e poco significativo scindere o separare i diversi aspetti di cui esso si compone: scientifico, matematico, magico, educativo e didattico.

Negli ambienti intellettuali l'autore coglie le suggestioni mistico-magiche del platonismo umanistico. La rilettura matemagica del Pacioli ce ne restituisce l'essenza. Infatti in Pacioli troviamo l'espressione di concetti che solo molti anni più tardi diverranno guida – con Cardano (1542) e Della Porta (1558) – ad un nuovo modo di intendere la "magia" cosiddetta "naturale" per distinguerla da quella "diabolica".

La magia naturale per Della Porta è la ricchezza e la delizia delle scienze naturali, la loro quintessenza. Le operazioni della magia sono meravigliose non perché oltrepassino i limiti delle possibilità naturali, ma perché

[1] Si veda nota 6 a p.182 di Bressanini e Toniato, 2011.

Figura 1 - Barbari Jacopo de' (1440 ca.-1515), particolare dal *Ritratto del matematico fra' Luca Pacioli e giovane ignoto*, Napoli, Museo di Capodimonte.

al volgo che osserva i fenomeni rimangono occulte le cause. E, ancora, scrive Campanella (1604): "Finché non s'intende l'arte, sempre dicesi magia: dopo è volgare scienza. L'invenzione della polvere dell'archibugio e della stampa fu cosa magica e così l'uso della calamita; ma oggi che tutti sanno l'arte è cosa volgare".

Due quindi, come in Pacioli, sono i fondamenti della magia naturale per Della Porta e per Campanella: le operazioni della natura e l'ignoranza dello spettatore per le cause che producono l'effetto spettacolare, stupefacente, inaspettato e misterioso dell'atto magico. Non a caso, più volte Pacioli sottolinea come il mantenere il segreto sia di fondamentale importanza per la riuscita dell'effetto magico. È in questo sguardo decisamente innovativo, quasi "libertino", che troviamo un altro dato interessante per la definizione del contesto sociale e della personalità del nostro autore: Pacioli, monaco francescano, giustifica l'uso di oggetti come dadi, carte, *triomphi* (tarocchi), che al tempo erano considerati poco adatti se maneggiati da un religioso, perché non utilizzati come strumenti d'azzardo ma come oggetti necessari a dimostrare il potere (*vis*) dei numeri (*quantitatis*) in modo facile e comprensibile. Strumenti didattici e di diletto, quindi.

Fra' Luca dal Borgo, oltre alle opere citate, ne scrisse altre, mai stampate ed oggi perdute. È stato recentemente ritrovato ed edito da Aboca Museum di Sansepolcro il suo *De Ludo,* titolato anche *Schifanoia*, testo dedicato al gioco degli scacchi.

Il Pacioli morì probabilmente nel 1517.

Il ***Codice n. 250*** **della Biblioteca Universitaria di Bologna** contiene una copia manoscritta – ad oggi l'unica pervenutaci – del *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli. Il testo fu redatto, probabilmente, tra il 1496 e il 1508, ma l'autore continuò a lavorarvi negli anni successivi, durante – quindi – l'ultimo periodo della sua vita, e l'opera non vide mai la luce delle stampe.

Il manoscritto, opera di un copista con probabili inserzioni di altre due differenti mani, proviene dalla biblioteca di Giovanni Giacomo Amadei (1768), appassionato bibliofilo e canonico della Basilica di Santa Maria Maggiore di Bologna.

Il *De viribus quantitatis* è un codice cartaceo composto da 306 carte (mm 240 x 165) con indice a numerazione romana da I a XIII e testo con numerazione araba da 1 a 293. Le carte sono raccolte in fascicoli di sei bifogli ognuno, segnati sul recto da una lettera minuscola e una cifra araba da 1 a 12. Si tratta di segnature che servono a legare nell'ordine giusto i bifogli di ogni fascicolo e (insieme ai numeri di fascicolo che si trovano in basso a sinistra sul recto della prima carta di ognuno e ai richiami sul verso dell'ultima carta) i fascicoli stessi.

Il manoscritto, in volgare, presenta ripetizione di frasi o singole parole, spostamenti di brani da un capitolo all'altro, assenza di spiegazioni di alcuni problemi enunciati (molti dei quali compaiono nell'indice ma non trovano riscontro nel testo), mancanza della maggior parte delle figure illustrative, inclusione di latinismi che rendono la comprensione del testo di notevole diffcoltà.

Il documento, così come ci è pervenuto, appare ancora in lavorazione in quanto mancano alcune ultime rifiniture, per esempio a c. 1r[2] era verosimilmente prevista una decorazione estesa: le decorazioni sui manoscritti si facevano sempre alla fine e dev'essere successo qualcosa che ha impedito si realizzassero gli ultimi ritocchi, probabilmente anche alcune delle figure per le quali è stato lasciato lo spazio libero.

Lo scritto rimasto "segreto" per secoli (non perché qualcuno cercasse di nasconderne l'esistenza per celarne i segreti svelati nello stesso, ma semplicemente perché non è venuto alla luce) fu copiato nel 1852 per essere ricompreso nella raccolta di manoscritti del principe Baldassarre Boncompagni. Da allora il *De viribus quantitatis* è stato spesso oggetto di studio di matematici e uomini di cultura (così come documentato in bibliografia) e interessante fonte per l'analisi della personalità del matematico rinascimentale, ma fu edito solo nel 1997 a cura di Augusto Marinoni per i tipi del Gruppo editoriale Giunti e dell'Ente Raccolta Vinciana. L'indice del Pacioli divide l'opera in diverse sezioni dedicate rispettivamente ad aritmetica, geometria, insegnamenti utili alla vita quotidiana e a quella mercantile, fisica, enigmi e giochi di parole.

L'autore ci offre quindi una summa scientifica del sapere magico-ludico, evidenziando le potenzialità offerte dall'affinamento intellettivo nel quotidiano.

[2] Come ben spiegato in Bressanini e Toniato ne *I giochi matematici di Fra' Luca Pacioli* (2011, p. 13),"i fogli dei manoscritti, indipendentemente dalla materia di cui sono fatti, sono detti carte; ogni carta ha due facce: chiamiamo *recto* la prima che è legata al dorso del volume lungo il lato sinistro, *verso* la seconda; per riferirci all'una e all'altra facciamo seguire il numero della carta dalla lettera"r" o "v" rispettivamente".

PARTE PRIMA: GIOCHI MATEMAGICI

Nel Pacioli i giochi eseguiti con monete, dadi e carte si basano tipicamente su principî o regolarità matematiche, perché questi oggetti ben si prestano a rappresentare quantità.

Un intero è raffigurabile con un eguale numero di monete di valore unitario o da monete di diverso valore; un dado presenta facce numerate da 1 a 6 ed è possibile usare più di un dado all'occorrenza; infine, le carte da gioco hanno valori da 1 a 13 e si possono creare diverse combinazioni grazie ai colori ed ai semi.

A volte uno stesso effetto è presentato all'inizio semplicemente con numeri e poi riproposto sia con dadi che con carte, così da aumentarne la comprensione e renderne la presentazione più varia e fuorviante (si veda – per esempio – il quarto *effecto).* Nei capitoli 30, 33 e 41 il gioco viene proposto sia con numeri che con dadi, carte e denari.

Monete e dadi sono stati utilizzati anche in precedenza (per esempio nell'opera di F. Calandri), ma l'uso delle carte è descritto per la prima volta nel *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos* e sucessivamente nel *De viribus quantitatis.*

Nessuno degli effetti doveva essere eseguito necessariamente con le carte ma, in alcuni casi, Pacioli indica esplicitamente che lo stesso gioco, presentato con le carte, risulta maggiormente ingannevole e fuorviante.

Nel seguito, per ogni effetto commentato, riporteremo in nota la pagina in cui il gioco compare nella trascrizione di Maria Garlaschi Peirani dal *Codice n. 250* della biblioteca universitaria di Bologna (DVQ). Riporteremo, inoltre, il riferimento all'Agostini che, nel suo *Il De viribus quantitatis di Luca Pacioli*, commenta i giochi che compaiono nella prima parte del trattato: delle forze naturali cioè *de arithmetica*.

Primo effecto: de un numero in doi parti

Come scrive l'Agostini[1], "i primi sei problemi consistono nel ritrovare le parti in cui – dai partecipanti al gioco – è stato diviso un numero proposto, ossia nel ritrovare più numeri, nota che ne sia la somma". La struttura di questi problemi è simile: si invita lo spettatore a svolgere una serie di operazioni aritmetiche sul numero pensato o sulle sue parti. Il risultato di tali operazioni permette di risalire alle parti incognite o al numero pensato.

Tutti questi effetti sono riconducibili a semplici equazioni rese, però, non trasparenti dalla dinamica del gioco.

Nel seguito proporremo la sequenza delle operazioni da svolgere, prima in modo discorsivo e poi formalizzeremo il procedimento dal punto di vista matematico: tale formalizzazione permette di comprendere meglio le similarità fra i vari effetti, la semplicità della loro struttura e il funzionamento del meccanismo di divinazione.

Nel primo di questi giochi Pacioli chiarisce che l'effetto si può ottenere sia lavorando con un certo numero (diciamo z) di ducati che vengono divisi in due parti (x e y) all'insaputa del conduttore del gioco, ma anche considerando *"pome, ova, noci, castagne etcetera, comprate, spese, vendute etcetera"*. Indipendentemente dal tipo di oggetto considerato, abbiamo quindi che $z = x + y$. Nello specifico, Pacioli tratta esplicitamente il caso in cui $z = 10$ ducati sono stati divisi in $x = 3$ e $y = 7$. Viene chiesto ad uno dei due astanti di moltiplicare per due il numero

[1] Agostini Amedeo, *Il De viribus quantitatis di Luca Pacioli*, Zanichelli, Bologna, 1925.

dei ducati da lui presi, in particolare pensiamo che il primo giocatore proceda nel considerare $2 \cdot x$ (nel caso specifico $2 \cdot 3 = 6$). All'altro giocatore viene richiesto di moltiplicare il suo numero (y) per la somma dei due, ovvero z, ottenendo così $z \cdot y$ (nel caso specifico $10 \cdot 7 = 70$).

I due risultati così ottenuti vanno sommati: $2 \cdot x + z \cdot y$ (nello specifico si ottiene 76). Tacitamente il prestigiatore moltiplica il numero di partenza, z, per $z + 1$ ("*et tu tacitamente numerarai la summa de ditti ducati per uno più, cioè 10 via 11*") e domanda ai due astanti la differenza fra quest'ultimo risultato (110) e la somma da loro ottenuta (76). "Il proponente (prestigiatore) si faccia quindi dire il risultato di tali operazioni: se dividerà mentalmente tale risultato per z-1, il quoziente sarà x e il resto y", come scrive l'Agostini.

Nel nostro caso la differenza è 34 che, divisa per 9 (ossia 10-1), dà 3 (esattamente x, come previsto) con il resto di 7 (ovvero y, sempre secondo la predizione).

Sottolinea il Pacioli che il gioco funziona correttamente se le parti non sono frazionarie (ossia non abbiano "rotti"):

"*Sequendo la data regola sempre retroverai ditte parti, ma bisogna che ditte parti non habbino rotto con seco, perochè alora ditta regola non satisfarrebbe*".

L'equazione che è alla base di questo gioco di divinazione è molto semplice ed è riportata dall'Agostini, il quale nota come questo"procedimento si trova anche usato in Fibonacci[2] e Ghaligai[3]":

$$[z \cdot (z + 1) - (2 \cdot x + z \cdot y)] \,/\, (z - 1) = x + y/\,(z - 1)$$

L'equazione riportata è sempre valida anche nel caso in cui uno dei due spettatori prenda un solo oggetto e, solo apparentemente, la descrizione dell'effetto fornita da Pacioli sembra non funzionare. Nell'esempio citato, in cui il numero di oggetti (z) è 10, se uno dei due spettatori prende una sola moneta (per esempio se $x = 1$), il resto della divisione è zero.

Abbiamo, infatti, che

$$z \cdot (z + 1) - (2 \cdot x + z \cdot y) = 10 \cdot 11 - (2 \cdot 1 + 10 \cdot 9) = 110 - 2 - 90 = 18$$

che diviso per 9 dà esattamente 2, quantità che effettivamente è pari a

$$x + y/(z - 1) = 1 + 9/9 = 1 + 1$$

ma, proprio poiché la divisione non fornisce resto, non è possibile immediatamente individuare x ed y. Si può, però, verificare che l'unico caso in cui la divisione non dà resto è quello in cui x o y sono uguali ad 1, quindi, automaticamente, anche in questa situazione il prestigiatore deduce che i due numeri cercati sono appunto 1 e z -1.

Probabilmente Pacioli "forzava"gli spettatori a scegliere più di un oggetto con frasi del tipo: "Prendi alcune delle monete sul tavolo e lascia le rimanenti al tuo compagno".

In questo modo, implicitamente, evitava che uno dei due giocatori prendesse una sola moneta o ne lasciasse una sola al compagno.

---

[2] Fibonacci, *Liber Abaci*, Roma, 1857.

[3] Ghaligai, *Pratica d'aritmetica*, Firenze, 1552, c. 67.

Secondo effecto: de un numero diviso in 3 parti[4]

Questo effetto è simile al precedente con l'unica differenza che il numero di oggetti (z) è diviso fra 3 giocatori: $z = x_1 + x_2 + x_3$. Come sopra, il prestigiatore moltiplica z per $z + 1$ e chiede ai giocatori di calcolare la differenza fra questo prodotto ed il risultato di una serie di operazioni condotte sulle singole parti da loro scelte.

In particolare si domanda al primo giocatore, che ha x_1 oggetti, di moltiplicarli per due, al secondo e al terzo (che hanno x_2 e x_3 oggetti) di moltiplicarli rispettivamente per il numero totale di oggetti e per il totale più uno.

Infine si chiede di sommare i risultati ottenendo così:

$$2 \cdot x_1 + z \cdot x_2 + (z + 1) \cdot x_3$$

La differenza fra $z \cdot (z + 1)$ e quanto appena ottenuto dai calcoli degli spettatori viene divisa per z -1: il risultato sarà x_1, il resto della divisione sarà x_2 e la quantità che manca per arrivare a z sommando x_1 ed x_2 è, naturalmente, x_3.

L'esempio riportato da Pacioli prevede $z = 10$ e $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Abbiamo quindi che:

$$2 \cdot x_1 + z \cdot x_2 + (z + 1) \cdot x_3 = 4 + 30 + 55 = 89$$

La differenza fra 110 (ossia $10 \cdot 11$) e 89 va divisa per 9 (ossia $z - 1 = 10 - 1$), ottenendo 2 (x_1 come previsto) con il resto di 3 (x_2) e x_3 si ottiene per differenza: $z - x_1 - x_2 = x_3$ (5 nel nostro caso). L'Agostini nota che anche Ghaligai[5] ricorre a questo procedimento per risolvere lo stesso problema.

L'equazione alla base di questo effetto è:

$$\{ z \cdot (z + 1) - [(2 \cdot x_1 + z \cdot x_2) + (z + 1)\, x_3] \} / (z - 1) = x_1 + x_2 / (z - 1)$$

Pacioli prosegue nel suo esempio mostrando che l'ordine con cui vengono scelte le parti non influisce sul buon esito del gioco, e ripropone i conti nel caso in cui $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 2$ e, poi ancora, risolve il caso $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 3$. Sottolinea, infine, che in questo caso, come nell'effetto precedente, *"facendo le parti con rotti la regola non serve"*.

A conclusione, Pacioli aggiunge alcuni abbellimenti coreografici, che rendono l'effetto ancora più strabiliante e nascondono ulteriormente il principio che sta alla base del funzionamento:

"Questo medesimo potrai fare con quartaroli, fave o altre monette: sirà più facile alo idiota et de numeri ignaro. Cioè tu gettarai là in taula una quantità de monete a te nota, ma ali circustanti parrà a caso et che tu non sapia, e se pur lo sanno non fa caso; et dirai che fra lor 3 li partino in modo che ognuno n'abia. Et facto questo, tu porrai in taula tanti quanto sia la multiplicatione del numero diviso via più 1; come in questo caso ne porresti 110, cioè 10 via 11 et poi tu, scostandote, comanda a loro comenzando da qual te pare che non fa caso, dicendo: 'Martino tolga doi volte tanto del monte quante che lui n'à'; et poi Giovani ne tolga 11 volte tante che lui n'à, etcetera, che tanto vale quanto multiplicando, dopiando, etcetera".

---

[4] DVQ 26, Agostini 9.

[5] Ghaligai, *op. cit.*, fol. 67.

Notiamo che la frase del Pacioli "*li partino in modo che ognuno n'abbia*" è fondamentale in quanto esclude la situazione in cui uno o più degli spettatori non scelga alcun oggetto.

In effetti, se anche solo una delle parti (x_1, x_2 o x_3) è pari a zero, pur essendo l'equazione riportata sopra valida, il gioco non sempre funziona.

Per esempio, nel caso descritto da Pacioli, in cui $z = 10$, se $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ e $x_3 = 1$ abbiamo che $110 - (0 + 90 + 11) = 9$. Questo risultato, diviso per 9, fa 1 con il resto di 0 e, quindi, le parti sono correttamente undividuate ma non nell'ordine giusto ($x_1$dovrebbe essere il quoziente, x_2 il resto e x3 è ottenuto per differenza). Per capire meglio dove il ragionamento diventa fallace quando uno degli spettatori non prende oggetti, analizziamo in dettaglio il caso in cui $z = 3$ in tutti i possibili sottocasi. Se ognuno dei tre spettatori prende un solo oggetto, ovvero se, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, abbiamo

$$z \cdot (z + 1) - [(2 \cdot x_1 + z \cdot x_2) + (z + 1)\, x_3] = 12 - (2 + 3 + 4) = 12 - 9 = 3$$

che diviso per 2 (ossia per $z - 1$) dà 1 (che, quindi, permette di indentificare la prima parte, $x_1 = 1$) con il resto di 1 (pari alla seconda parte, x_2) e l'effetto matemagico funziona. Se invece si consente che uno degli spettatori non scelga alcun oggetto, non sempre il procedimento porta alla corretta identificazione delle tre parti. Analizziamo dettagliatamente nella tabella che segue tutti i casi che si possono verificare:

Parti: $x_1\ x_2\ x_3$	Equazione	Quoziente	Resto	Funziona?
0, 1, 2	12 – 11 = 1	0	1	SI
0, 2, 1	12 – 10 = 2	1	0	NO
1, 0, 2	12 – 10 = 2	1	0	SI
1, 2, 0	12 – 8 = 4	2	0	NO
2, 1, 0	12 – 7 = 5	2	1	SI
2, 0, 1	12 – 8 = 4	2	0	SI

Notiamo, quindi, che in alcuni casi il gioco funziona, in altri invece, seguendo il procedimento descritto da Pacioli, è possibile individuare le tre parti in cui il numero originale di oggetti è stato diviso ma non nell'ordine corretto. Per evitare problemi di questo tipo è però sufficiente imporre che ogni giocatore scelga almeno un oggetto, come giustamente sottolineato da Pacioli.

Terzo effecto: pur de un numero in 3 parti diviso aliter[6]

Per questo gioco matematico e per i successivi riportiamo solo la sequenza di operazioni da eseguire sulle parti del numero diviso: $z = x_1 + x_2 + x_3$.

Una delle tre parti va raddoppiata ($x_1 \cdot 2$), una moltiplicata per z -1 (qui la prima differenza rispetto all'effetto precedente, in cui una delle tre parti veniva invece moltiplicata per z +1) e

[6] DVQ 29, Agostini 9.

l'ultima va moltiplicata per il numero di partenza ($x_3 \cdot z$). I risultati di queste tre operazioni sono poi da sommare ottenendo così:

$$2x_1 + (z - 1) \cdot x_2 + z \cdot x_3$$

Nella sua mente il prestigiatore deve invece calcolare il quadrato di z (e non, come prima, moltiplicare z per $z + 1$) e aggiungere un numero a scelta, diciamo y. Quest'ultimo passaggio algebrico è un semplice abbellimento stilistico funzionale solo alla presentazione: il numero y verrà sottratto nel passaggio successivo rendendo così la sua aggiunta ininfluente.

Viene ora chiesto ai tre astanti di sottrarre quanto da loro ottenuto da $z \cdot z + y$ e, quindi, di togliere y. Il risultato va ora diviso per z -2: si ricava x_1 con il resto di x_2, e x_3 si ottiene per differenza rispetto a z.

Il gioco si riassume in questa equazione:

$$\{z \cdot z + y - [2x_1 + (z - 1) \cdot x_2 + z \cdot x_3] - \mathrm{y}\}/(z - 2) = x_1 + x_2/(z - 2)$$

che, nota l'Agostini, di poco differisce da un'analoga relazione utilizzata da Fibonacci[7].
Una curiosità: l'equazione con cui l'Agostini riassume il gioco del Pacioli non prevede l'aggiunta e la sottrazione di y, mentre l'equazione, riportata sempre dall'Agostini e riferita a Fibonacci, prevede questo abbellimento stilistico. Si tratta di un errore dell'autore o questa discrepanza ci porta a ritenere che l'Agostini avesse accesso ad una versione del *De viribus quantitatis* diversa da quella a noi pervenuta.

Quarto effecto: de un numero in 3 diviso, etcetera[8]

Rispetto ai precedenti, questo gioco presenta un ulteriore abbellimento nella presentazione. Il prestigiatore pensa nella sua mente ad un numero y che sia maggiore di z. Come prima z è stato diviso dagli astanti in 3 parti: $z = x_1 + x_2 + x_3$. Si chiede al primo giocatore di moltiplicare il suo numero per due. Al secondo di moltiplicare x_2 per y e al terzo di moltiplicare x_3 per $y + 1$. I risultati vanno quindi sommati, ottenendo:

$$2x_1 + y \cdot x_2 + (y + 1) \cdot x_3$$

Il prestigiatore chiede ora di sottrarre il totale da $z \cdot (y + 1)$ e di dividere il risultato per y -1. La divisione darà x_1 con resto di x_2 e, come nei giochi precedenti, x_3 si ottiene per differenza rispetto a z.

L'equazione che sta alla base dell'effetto è:

$$\{z \cdot (y + 1) - [2x_1 + y \cdot x_2 + (y + 1) \cdot x_3]\}/(y - 1) = x_1 + x_2/(y - 1)$$

Per esemplificare, Pacioli considera questo esempio: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ (così che $z = 10$) e infine $y = 12$. In questo caso risulta:

$$2x_1 + y \cdot x_2 + (y + 1) \cdot x_3 = 4 + 36 + 65 = 105$$

[7] Fibonacci, *op. cit.*, p. 307.
[8] DVQ 30, Agostini 10.

che, sottratto a 10·13, dà 25. Dividiamo, infine, 25 per 11 e abbiamo 2 (ovvero x_1) con il resto di 3 (x_2) e di conseguenza $x_3 = 5$.
Pacioli svolge anche i conti per il caso $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$ (a sottolineare che l'ordine con cui vengono prese le 3 parti è ininfluente sul risultato) e $y = 15$.

Si conclude con una generalizzazione interessante: se il primo numero (x_1) invece di essere raddoppiato fosse triplicato, quadruplicato o, in generale, moltiplicato per n, la divisione finale deve essere fatta rispetto a $y + 1$ (il moltiplicatore della terza parte) meno n.
Si ottiene quindi che la quantità

$$z \cdot (y + 1) - [x_1 \cdot n + x_2 \cdot y + x_3 \cdot (y + 1)]$$

divisa per $y + 1 - n$ dà x_1 con il resto di x_2.
Per esempio, se $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $y = 13$ e $n = 5$ abbiamo che:

$$x_1 \cdot n + x_2 \cdot y + x_3 \cdot (y + 1) = 10+39 +70 =119$$

Questo totale, sottratto a $140 = z \cdot (y + 1)$ fa 21 che, diviso per 9 (cioè 13 + 1 - 5) dà 2 (x_1) con resto di 3 (x_2). È necessario, però, nota Pacioli, che n sia tale per cui sottraendo $x_1 \cdot n + x_2 \cdot y + x_3 \cdot (y + 1)$ a $z \cdot (y + 1)$ non si ottenga un numero negativo perché "*alora la regola non serve*".

Come riportato dall'Agostini, Pacioli chiude la descrizione di questo effetto sottolineando come "tale metodo possa servire anche per indovinare i punti segnati da due o tre dadi qualor se ne conosca la somma. Così pure – assegnando a ciascuna carta da giuoco un numero corrispondente al proprio valore – si potrà indovinare il valore di 2 o 3 carte, qualora si conosca la somma dei numeri corrispondenti ai singoli valori".

Quinto effecto: de un numero diviso fra 4, overo in 4 parti[9]

In questo esercizio matemagico, sia $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Per ritrovare le 4 parti in cui è stato diviso il numero di partenza dobbiamo impostare un sistema di 4 equazioni. Per ottenere la prima equazione si sommino fra loro:

$$x_1 + x_2 + x_3 \text{ e anche } x_2 + x_3 + x_4 \text{ e infine } x_1 + x_3 + x_4$$

Si sommi ora il tutto e il risultato sia sottratto dal triplo del totale z:

$$3 \cdot z - [(x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3 + x_4) + (x_1 + x_3 + x_4)]$$

Si ottiene, con facili passaggi:

$$\begin{gathered} 3 \cdot z - (2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4) = \\ 3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - (2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4) = \\ x_1 + x_2 + x_4 \end{gathered}$$

Il risultato va ora sottratto al numero originale, z, ricavando x_3:

[9] DVQ 36, Agostini 10.

$$z - (x_1 + x_2 + x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - (x_1 + x_2 + x_4) = x_3$$

A questo punto $z - x_3$ risulta essere un numero diviso in tre parti ovvero: $z - x_3 = (x_1+ x_2+ x_4)$, e Pacioli consiglia di utilizzare uno dei metodi illustrati negli effetti precedenti per trovare x_1, x_2 e x_4 (in una sorta di procedere induttivo).

In alternativa, suggerisce di impiegare un procedimento analogo a quello appena analizzato, definendo cioè altre 3 equazioni simili alla precedente. In particolare, per ottenere la seconda equazione, utile ad identificare x_4, si possono sommare fra loro $x_2+ x_3+ x_4$ e anche $x_1+ x_3+ x_4$ e, infine, $x_1+ x_2+ x_4$. Si sommi ora il tutto e il risultato sia sottratto dal totale, z, moltiplicato per 3, ottenendo $x_1+ x_2+ x_3$.

Procedendo quindi come sopra (ossia sottraendo al numero originale) si ricava x_4. In modo analogo si riesce ad identificare x_1 se si sommano, in partenza $x_1+ x_3+ x_4$ e anche $x_1+ x_2+ x_4$ e infine $x_1+ x_2+ x_3$. L'effetto si conclude calcolando x_2 per differenza rispetto al totale.

Il lettore appassionato può trovare nel seguito una formalizzazione matematica di questo effetto: per identificare il generico x_i (con i = 1, 2, 3, 4) è necessario sottrarre da $3z$ la somma delle tre possibili combinazioni del tipo: $x_i+ x_j+ x_k$ con l'indice j scelto nell'insieme S = {1, 2, 3, 4} - {i}, ovvero, j può essere scelto fa i valori 1, 2, 3, 4 escludendo però i, mentre l'indice k è scelto fra i valori 1, 2, 3, 4 (sempre escludendo i), avendo l'accortezza che j sia diverso da k.

Per esempio se i = 2, abbiamo

$$3z - [((x_2 + x_1 + x_3) + (x_2 + x_1 + x_4) + (x_2 + x_3 + x_4)]$$

Da questa differenza si ottiene sempre la quantità Q_i data da:

$$Q_i = 3z - (2 \sum_j x_j + 3x_i) = 3\sum_j x_j - 2\sum_j x_j = \sum_j x_j, \text{ con } j \in S\text{-}\{i\}$$

e vale $x_i = z - Q_i$ per ogni valore di i = 1, 2, 3, 4.

Sexto effecto: de un numero diviso in 5 parti[10]

Il gioco è analogo al precedente, ma la soluzione richiede un passaggio aggiuntivo: in questo caso, avendo 5 incognite (le 5 parti), è necessario impostare un sistema con 5 equazioni. Si parte considerando $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Si sommino

$x_1+ x_2+ x_3+ x_4$ e poi
$x_2+ x_3+ x_4+ x_5$ e ancora
$x_3+ x_4+ x_5+ x_1$ e infine
$x_4+ x_5+ x_1+ x_2$

Il totale viene sottratto a 4 volte z e dal risultato si toglie z (ovvero si sottrae a z·3 la somma dei 4 numeri elencati sopra) ottenendo x_4. Possiamo infatti leggere i quattro numeri considerati in partenza come una matrice di dati:

[10] DVQ 37, Agostini 11.

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_2 \end{matrix}$$

in cui, sulla diagonale secondaria, compare x_4 (che quindi è ripetuto 4 volte) mentre tutti gli altri numeri compaiono solo 3 volte. Questo è il motivo per cui, alla fine delle operazioni suggerite dal Pacioli, che – in sostanza – prevedono di sottrarre dalla matrice di numeri 3 volte z (ovvero 3 volte x_1, 3 volte x_2, 3 volte x_3 e 3 volte x_4), quello che resta è x_4.

Gli ulteriori passaggi prevedono di lavorare con una matrice di partenza diversa, in particolare, per isolare x_5 si parte dalle seguenti somme:

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ e poi
$x_3 + x_4 + x_5 + x_1$ e ancora
$x_4 + x_5 + x_1 + x_2$ e infine
$x_5 + x_1 + x_2 + x_3$

Ovvero si considera la matrice di dati

$$\begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_2 \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

in cui, sulla diagonale secondaria compare x_5 (ripetuto quindi 4 volte) mentre tutti gli altri numeri sono ripetuti solo 3 volte. Di conseguenza, sommando 4 volte z e, poi, sottraendo z (ovvero sommando 3 volte z, ossia 3 volte x_1, 3 volte x_2, 3 volte x_3 e 3 volte x_4) e, infine, sottraendo il risultato dalla matrice dei dati, si isola x_5.
Per identificare x_2 si considera:

$x_4 + x_5 + x_1 + x_2$ e poi
$x_5 + x_1 + x_2 + x_3$ e ancora
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ e infine
$x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Nelle precedenti somme x_2 compare 4 volte mentre tutti gli altri numeri compaiono 3 volte e, quindi, si elidono quando il tutto viene sottratto a $z \cdot 3$. Per isolare x_1 si considera, infine, la somma di:

$$\begin{matrix} x_3 + x_4 + x_5 + x_1 \\ x_4 + x_5 + x_1 + x_2 \\ x_5 + x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{matrix}$$

Pacioli fa ora riferimento ad un'immagine che, però, manca nel manoscritto a noi pervenuto. Possiamo ritenere che tale figura illustrasse, schematicamente, le matrici di dati a cui abbiamo fatto riferimento.

L'effetto si conclude riconoscendo che il procedimento può essere esteso e generalizzato: *"E così porrai sequire in infinito in questo modo, che se 'l numero sia diviso in 4 giognerai gli ternarii et cavarali del triplo del numero diviso, el resto poi de ditto numero commo de sopra festi in lo 5° effecto. Et se 'l sirà diviso in 5 parti, commo in questa, tu caverai gli acozamenti deli quaternarii del quadruplo del numero diviso et poi le remanente cavarai del numero et harai la 4a parte, comme ài visto in questa".*

E se il numero di partenza fosse stato diviso in 6 parti, sommerai le prime 5 parti ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$), poi le successive 5 ($x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$) e poi ancora ($x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1$) fino ad ottenere 5 numeri da sommare.

La loro somma sia quindi sottratta al quintuplo del numero di partenza e poi si sottragga, di nuovo, il numero originario: in questo modo si isola x_5 come la matrice riportata sotto evidenzia:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_1 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 \\ x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

Per isolare x_6 si considera la seguente matrice:

$$\begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_1 \\ & & \dots & & \\ x_6 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4. \end{matrix}$$

E così di seguito.

Septimo effecto: trovare un numero pensato intero[11]

I problemi dal 7 al 15 sono tutti del tipo "Indovina un numero pensato". Una persona sceglie un numero, comunica poi al proponente il risultato di alcune operazioni calcolate a mente sul numero stesso e subito questi indovina il numero originario.

Scrive a proposito l'Agostini: "Nel numeroso gruppo di problemi che seguono il Pacioli ci insegna vari modi per ritrovare un numero pensato da un'altra persona".

Pacioli stesso ci illumina sullo schema che seguirà per presentare i vari effetti che, sottolinea, sono basati sulla "forza dei numeri" (*vis quantitatis*, come suggerito nel titolo stesso del manoscritto, letteralmente, "Proprietà dei numeri e delle figure"; noi useremo una traduzione libera del titolo che riteniamo più evocativa): verrà prima considerato il caso di un numero *"sano senza rotto, et poi sano con rotto, et poi rotto solo senza sano. Quali effecti certamente appresso ogn'altro sonno dignissimi e le lor regole, commo se vederà, sonno fondate in grandissime forze de' numeri".*

Il primo caso esaminato, quindi, è quello in cui il numero pensato sia intero. Indichiamo con x tale numero. Si chiede di considerare la metà di x e di aggiungerla ad x, ottenendo così $y = x + x/2$. Si richiede ora di segnalare se il risultato di questa operazione è intero o "rotto" (frazionario).

---

[11] DVQ 40, Agostini 11.

Nel caso in cui il risultato fosse un numero frazionario, è necessario arrotondarlo per eccesso e il prestigiatore terrà a mente 1. Sul risultato (eventualmente arrotondato) si esegue di nuovo la stessa operazione, si aggiunge cioè la metà, ottenendo $y + y/2$.

Ancora lo spettatore sarà invitato a dichiarare se quanto ottenuto è "rotto", nel qual caso lo si approssima nuovamente per eccesso all'intero più vicino e il prestigiatore terrà a mente 2. *"... Et questo facto, dirai che ne cavi 9 quante volte pò..."*, cioè si chiede di dividere il tutto per nove e di riferire il risultato della divisione. Tale risultato verrà segretamente moltiplicato per 4 dal prestigiatore che poi vi aggiungerà 1, 2 o 3 a seconda che si sia arrotondato solo al primo passaggio, solo al secondo o ad entrambi. L'Agostini riassume l'effetto nella seguente identità:

$$[x + x/2 + 1/2\cdot(x + x/2)]/9 = x/4$$

e sottolinea che le stesse operazioni riportate da Pacioli "sono indicate dal Fibonacci[12] e dal Tartaglia" nella prima parte del *General trattato di numeri e misure*[13].

Dall'equazione riportata dall'Agostini appare chiaro come l'effetto sia valido anche se i risultati intermedi sono frazionari. I meccanismi di arrotondamento richiesti dal Pacioli potrebbero servire per evitare conti con numeri non interi o per mascherare il meccanismo che garantisce il buon funzionamento dell'effetto. A quest'ultimo scopo Pacioli considera due varianti: invece di dividere per 9 suggerisce di dividere per 18 (e poi moltiplicare per 8 invece che per 4).

La seconda variante serve, invece, *"per chiarirte se lui habbia ale mani summa grande, dirai che di lei ne cavi un numero grande, verbi gratia 100; gli quali cavandoli tu tacitamente, regerate sempre per ditti novenarii, cioè tirai a mente"*.

Le varianti sono proposte perché *"costumano speso le brigatte, quando vengano far qualche gentilezza, de pregare el Maestro che la facia un'altra bolta, sempre con animo de potere comprendere el modo che molti se trovano perspicaci che li ven facto; et per questo fa' che tu non servi sempre un medesimo modo"*.

La descrizione dell'effetto si conclude, come sempre, considerando dei casi specifici. Qui Pacioli è molto didattico e considera tutti i casi possibili:

- senza "rotti" né alla prima né alla seconda operazione (partendo da $x = 12$, abbiamo $x + x/2 = 18 = y$, al passaggio successivo otteniamo $y + y/2 = 27$ che diviso per 9 fa 3, quindi, il numero di partenza si ottiene come $3\cdot4 = 12$);
- con "rotti" solo alla prima operazione (partendo da $x = 5$, abbiamo $x + x/2 = 7{,}5$ quindi $y = 8$, al passaggio successivo otteniamo $y + y/2 = 12$ che diviso per 9 fa 1, quindi, il numero di partenza si ottiene come $1\cdot4 + 1 = 5$);
- con "rotti" solo alla seconda operazione (partendo da $x = 6$, abbiamo $x + x/2 = 9 = y$, al passaggio successivo otteniamo $y + y/2 = 13{,}5$; dividendo quindi 14 per 9 abbiamo 1 e di conseguenza il numero di partenza si ottiene come $1\cdot4 + 2 = 6$);
- e infine il caso con "rotti" sia al primo che al secondo passaggio (partendo da $x = 15$, abbiamo che $x + x/2 = 22{,}5$, quindi $y = 23$ e $y + y/2 = 34{,}5$, dividiamo di conseguenza 35 per 9 e otteniamo 3, quindi il numero di partenza è pari a $3\cdot4 + 3 = 15$).

Moderni giochi di prestigio sono basati su principî simili a quelli descritti da Pacioli nei problemi esposti dal 7 al 15. Per comprendere come questo tipo di effetti si possa presentare in

[12] Fibonacci, *op. cit.*, p. 303.
[13] Tartaglia, Venezia, 1556, fol. 264, n. 197.

modo moderno ed accattivante, riportiamo nel seguito un gioco tratto da Giobbi[14].

L'effetto è noto come *Affinity in numbers* e si basa su un'idea descritta da Scarne nel suo libro *Scarne on Card Tricks*. Giobbi sottolinea che si tratta di un esempio di come un effetto costruito su principî matematici si possa presentare in modo tale da eliminare nella mente dello spettatore l'idea che il gioco funzioni grazie a regolarità matematiche e appaia invece come una lettura del pensiero effettuata con poteri magici:

"... it is an example of how it is possible to place something rather trivial, such as a mathematical procedure, into a new context. Many spectators will remember later that you divined their card, wheras all you did, in reality, was discover a number".

L'importanza data alla componente scenica della presentazione ai fine di fuorviare lo spettatore e celare il principio matematico è formalizzata per la prima volta nella storia da Pacioli ed è illuminante circa la sua modernità di pensiero. Questo fa del *De viribus quantitatis* un testo di riferimento ancora oggi di grande interesse per gli storici di giochi di prestigio.

Nel seguito verrà approfondita la presentazione dell'effetto. Le parti fra virgolette sono tratte dalla descrizione riportata da Giobbi il quale si preoccupa di descrivere il gioco con le parole adatte a presentare un gioco di prestigio al pubblico così da rendere il tutto più pregnante e motivare ogni operazione matematica di moltiplicazione, somma o divisione con una frase capace di distogliere l'attenzione dello spettatore dall'operazione in sé, portandolo a focalizzarsi invece sul fatto che si stia tentando un esperimento di lettura del pensiero.

Il prestigiatore posiziona sul tavolo una carta coperta (per la precisione un due, di un qualunque seme) affermando che si tratta di una "mezza previsione". Domanda allo spettatore di pensare un numero e quindi di scegliere la carta corrispondente (anche qui il seme della carta non è rilevante) e di porla, sempre coperta, a fianco dell'altra carta. Le due carte scelte, una dal prestigiatore e una, liberamente, dallo spettatore, formano la previsione finale.

Si chiede ora allo spettatore di effettuare le seguenti operazioni algebriche sul numero da lui pensato (che indichiamo con x):

- moltiplicarlo per due, "per rendere il gioco doppiamente interessante" (otteniamo così $2x$),
- aggiungere due, "uno per me e uno per te" ($2x + 2$).

Moltiplicare per dieci, "questo è facile, basta aggiungere uno zero": si ottiene quindi $(2x + 2)\cdot 10 = 20x + 20$.

Si chiede ora di dividere per 2, "perché, come ricordi, la nostra predizione consta di due carte" (ottenendo $10x + 10$) e infine di sottrarre 8 al risultato, "perché 8 è il simbolo dell'infinito" (abbiamo quindi come risultato finale $10x + 2$).

Si domanda, infine, di scoprire la previsione, ovvero di girare le due carte che fino ad ora erano rimaste coperte sul tavolo: con sorpresa di tutti il numero svelato dalle carte coincide con il risultato delle varie operazioni!

Come spesso usa il Pacioli nel *De viribus quantitatis*, anche Giobbi si preoccupa di generalizzare l'effetto in modo da ottenere delle varianti nel caso venga richiesto dalla "brigata" di ripetere il gioco. In questo modo, un'eventuale ripetizione con variante aiuterebbe a dissimulare ulteriormente il principio.

In particolare, l'ultimo numero sottratto, 8 nel nostro caso, è il complemento a 10 della carta inizialmente posta sul tavolo dal prestigiatore (la prima metà della predizione, il 2).

Nel caso di ripetizione dell'effetto, la carta posta a faccia in giù sul tavolo potrebbe essere un

[14] Giobbi, *Card College* – vol. 5, p. 1153, Florence Art Edizioni, 2009.

3 e l'effetto funzionerebbe purché alla fine si sottragga 7 (il complemento a 10 di 3).

Occorre, però, trovare una motivazione "matemagica" per sottrarre 7: se fra gli spettatori c'è un bimbo di 7 anni, la sua età fornirà la"scusa"adatta! Oppure, la mezza predizione potrebbe essere 7 (la carta scelta dal prestigiatore e posta, coperta, sul tavolo) e il numero sottratto alla fine dell'effetto 3, se sappiamo che lo spettatore ha 3 figli: *"sottrarre uno per ogni figlio"*, e così via.

Nono effecto: a trovare un numero senza rotto[15]

Anche in questo effetto, come nel precedente, si assume che il numero di partenza, x, sia intero. Si chiede allo spettatore di moltiplicare tale numero per 3 e di dividere il prodotto per 2 *"cioè che ne prenda gli 3/2"* come nota Pacioli stesso. Si esegue ora di nuovo la stessa operazione, cioè si prendono i 3/2 del risultato *"et de questa ultima multiplicatione cavane 9 quante volte si pò et per ogni 9 tieni a mente 4, commo nel 7° effecto"*, ovvero si divida per 9 e si moltiplichi per 4.

La moltiplicazione per 4 (del risultato della divisione per 9), è effettuata tacitamente dal prestigiatore, ottenendo quindi il numero di partenza. La seguente identità riassume le operazioni effettuate:

$$x \cdot (3/2) \cdot (3/2) \cdot (4/9) = x$$

In questo gioco non sono necessarie approssimazioni per il corretto funzionamento, ma, di nuovo, Pacioli suggerisce un espediente di arrotondamento capace di rendere il meccanismo di funzionamento meno evidente. Questa volta, però, gli arrotondamenti vengono calcolati per difetto: nel caso si esegua un arrotondamento solo alla prima divisione per due, nella mente il prestigiatore deve ricordare di sommare 3 alla fine; se l'arrotondamento avviene solo alla seconda divisione, alla fine bisogna sommare 2; se infine arrotondiamo sia alla prima che alla seconda divisione, è sufficiente sommare uno.

Così, per esempio, $x = 5$, $3 \cdot x = 15$, che diviso per 2 fa 7,5 che viene quindi arrotondato per difetto a 7. Si moltiplica il risultato nuovamente per 3 e si divide per 2 ottenendo 10,5 che arrotondiamo a 10. Se dividiamo ora per 9 abbiamo 1. Il numero di partenza viene quindi ottenuto dal prestigiatore moltiplicando $1 \cdot 4$ ed aggiungendo 1 per via delle approssimazioni.

L'Agostini riporta l'equazione e nota che "le stesse operazioni sono indicate dal Fibonacci" prima e poi dal Ghaligai[16] e dal Tartaglia[17] e quindi dal Bachet[18].

Decimo effecto: de trovar un numero senza rotto[19]

Il gioco è molto simile al precedente e, forse, ancora più semplice. Partendo da x, il numero pensato, si chiede allo spettatore di triplicarlo e poi dividerlo per due. Se il numero di partenza è pari, la divisione per due non dà resto, in caso contrario si approssima per eccesso e si tiene a mente 1 che si aggiungerà tacitamente alla fine. Quanto ottenuto viene a sua volta nuovamente triplicato e si chiede allo spettatore di riferire il risultato della divisione per 9. Il prestigiatore

[15] DVQ 45, Agostini 11.
[16] Ghaligai, *op. cit.* p. 303-304.
[17] Tartaglia, *op. cit.*, fol. 66, n. 34 e 36.
[18] Bachet, *op. cit.* fol. 264, n. 198; Probl, II.
[19] DVQ 46, Agostini 11.

raddoppi il risultato ed otterrà il numero pensato come appare evidente dalla seguente identità:

$$x \cdot (3/2) \cdot (3/9) \cdot 2 = x$$

Due sono gli esempi riportati dal Pacioli: x = 10 e x = 13. E' interessante notare come Pacioli concluda l'effetto scrivendo: *"Se 'l fondamento di tal regola haver desii, sia per questo…"*, fornisce cioè una spiegazione del principio alla base del funzionamento del gioco.

A tal fine conduce l'effetto proposto partendo dall'unità e dal "binario".

Se $x = 1$, triplichiamo (3·1) e dividiamo poi per due (1,5), arrotondando per eccesso, otteniamo 2, che – a sua volta – triplicato, dà 6 e diviso per 9 fa zero con il resto di 6, e quindi il numero pensato si ottiene come 0·2 + 1. Se partiamo invece da $x = 2$, triplichiamo (6), dividiamo per 2, triplichiamo nuovamente e dividiamo per 9, otteniamo 1 senza resto; quindi, seguendo la spiegazione dell'effetto, il numero di partenza è 1·2 = 2.

Pacioli conclude osservando: *"Et per questo si dà regola generale et infallibile… Conciosia quod isti due numeri, unitas et binarius, secondo gli phylosophi, paritatis ed inparitatis sint principia"*.

L'Agostini nota che l'identità usata "serve al Bachet per formulare il suo I problema" e che si trova anche in Chuquet[20].

Undecimo effecto: a trovar un numero in tutti modi[21]

L'undicesimo e il dodicesimo effetto si basano sullo sviluppo del binomio di Newton scoperto nel 1665 e, quindi, ancora sconosciuto a Pacioli nella sua formula generale, ma al quale – evidentemente – erano già note le prime due potenze del binomio utilizzate rispettivamente nei due effetti. Pacioli riconduce la regola alla base dei due effetti al secondo libro di Euclide: *"Et questa regola se cava dal nostro phylosopho nella 4ª del suo secondo libro"*.

La formula di Newton esprime la potenza *n*-esima di un binomio qualsiasi nel modo seguente:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Per n =2, 3 e 4 otteniamo, rispettivamente,le espressioni:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

I coefficienti che troviamo nello sviluppo del binomio di Newton (cioè i numeri che compaiono nella prima formula a destra dell'uguale: 1, 2, 1; nella seconda formula, sempre a destra dell'uguale: 1, 3, 3, 1 ecc.) si possono ricondurre ai numeri nel triangolo di Tartaglia.

In ciascuna riga è possibile osservare che gli elementi del triangolo si ottengono come somma di due elementi adiacenti della riga precedente:

[20] Chuquet, *Triparty en la science des nombres*, p. 456, probl. 155.

[21] DVQ 48, Agostini 12.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

La costruzione di questo triangolo di numeri era nota ai matematici cinesi già nel XIV secolo e, forse, anche in epoca precedente. In Italia prese il nome da Niccolò Fontana, detto il Tartaglia, che lo descrisse in un suo trattato diffuso nella prima metà del XVI secolo.

Pacioli utilizza la prima identità del binomio di Newton per indovinare un numero pensato, z . Si chiede al giocatore di scomporre z come somma di due parti (numeri) qualsivoglia, $z = x + y$, e di calcolare il quadrato di x e y. Si richiede, poi, di sommare i due quadrati e di aggiungere due volte il prodotto delle parti: *"dirai che di quel tal numero ne facia 2 parti, qualitercumque contingat, et l'una et l'altra parte multiplichi in sé medesima; et poi multiplichi l'una parte nel'altra, et gionga insiemi gli doi quadrati dele ditte parti con doi volte quel che fa l'una parte multiplicata in l'altra".*

Si ottiene in questo modo

$$(x + y)^2 = z^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Noto quindi il risultato delle operazioni, il prestigiatore deve semplicemente calcolarne la radice quadrata per ottenere il numero pensato.

Pacioli esemplifica l'effetto partendo dai casi $z = 12 = 4 + 8$ (numeri "sani") e $z = 10^2/_3 = 4^1/_3 + 6^1/_3$ (numeri "rotti").

Duodecimo effecto: un numero in tutti modi[22]

Molto simile al precedente, questo effetto si basa sull'identità:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Il numero pensato dallo spettatore, z, viene scomposto come somma di due parti (*"o intere o con spezzati non fa caso"*): $z = x + y$. Sulle parti si chiede allo spettatore di eseguire le operazioni necessarie ad ottenere $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Noto il risultato di tali operazioni, il prestigiatore risale al numero pensato calcolando la sua *"radicuba"*, ovvero la radice cubica.

Gli stessi due esempi numerici dell'*undecimo effecto* vengono sviluppati per dimostrare il funzionamento di questo gioco.

Partendo dalle successive potenze del binomio di Newton (n = 4, 5, ...) si potrebbero

[22] DVQ 49, Agostini 12.